Proof on Algorithm of Heap Reconstruction Reproduce Valid Heap

Hiroki Shibata

2026, Jan.

1　はじめに

ヒープの根の節点を取り除いて，端の値を持ってきて入れ替えを繰り返しまたヒープを作るというアルゴリズムが正しく動作することを数学的帰納法により証明する．数学的帰納法の良い題材だと思うので，各自取り組まれたい．途中，以下の最小値の 2 つの定義が出てくるが，

$$\forall j, a_i \leq a_j$$

と

$$a_i = \min_j a_j$$

が同値であることが，初学者ではぱっとはわからないだろうから，このことについてまず考えて見るとよい．ヒープでは比較を行うため，上記比較と最小値の定義が同値であることをわかる必要がある．

2　定義

グラフ $G = (V, E), E \subset V^2$ があるとする．G は木であるとする．$i \in V$ を根に持つ部分木が存在する場合それを T_i と書く．T_i の要素は $(i, v_1), (v_2, v_3), ..., (v_n, j) \in E$ となる辺の列すなわち経路が一意に存在するような $j \in V$ の全体に i を加えた集合である．i の子の集合を $E_i = \{j | (i, j) \in E\}$ と書く．i 上に定義された実数値 $a_i \in \mathbb{R}$ があるとする．

このとき，G が値の族（ここでは連想配列と同じ）a においてヒープであるとは，G が木でありすなわち $T_i = V$ となる i が存在し，かつ次の条件を満たすことである．

$$\forall l \in V, \forall j \in T_l, a_l \leq a_j \tag{1}$$

ここで，$T_i = V$ となる i を 0 と表記する．すなわち，$T_0 = V$ とする．また $R_i = E_i \cup \{i\}$ と定義し，後に利用する．

次のアルゴリズムを考える．これは a_0 を任意の値 $x \in \mathbb{R}$ で置き換えたのち，a を下記の方法で修正することで G を再び a 上でヒープとするアルゴリズムである．

アルゴリズム 1 a に対するヒープ G と任意の値 $x \in \mathbb{R}$ について $a_0 = x$ と a_0 の値を置き換える．このとき，0 から q へ至る G 上の経路（今 $V = T_0$ なので一意味に存在する）上の接点の列を $p_1, p_2, ..., p_n$ とし，すべての $l = 1, 2, ..., n-1$ に対して，

$$\forall j \in R_{p_l}, a_{p_l} \leq a_j \tag{2}$$

となるように a に修正を加える．具体的には，l に対して，$a_t = \min_{j \in R_{p_l}} a_j$ となる t を選び，a_t, a_l の値を入れ替える．この手続きを全ての $l = 1, 2, ..., n-1$ に対して再帰的に繰り返す．

命題 1 上記アルゴリズム 1 により任意の x について G は a に対してヒープになる．

証明と関係ないが，アルゴリズム 1 の計算量は式 (2) を適用する l の範囲に等しいため，$O(n)$ であることがわかる．2 分ヒープなら $n = \log_2 |V|$ である．

3 証明

以降命題 1 を証明する．V の要素数を $|V|$ と書く．$|V| = 1$ のとき，これは自明にヒープである．$|V| < k$ に対して，命題 1 が成り立つとし，$|V| = k$ のグラフと a に対して考える．まず $q \in V, E_q = \emptyset$ を選ぶ．アルゴリズム 1 の処理を式 (2) の $l = 1$ についてのみ適用する．つまり，

$$\forall j \in R_0, a_0 \leq a_j \tag{3}$$

とする（上記式を満たす修正が可能であるとする．実装上は単純に入れ替えるだけである．）．このとき，$j \in E_0 (\subset R_0)$ に関して，T_j のグラフは木であるが，$|T_j| < k$ であるため帰納法の仮定によりこれがヒープとなるように a を修正することができる．つまり，以下を満たすようにすることができる．

$$\forall m \in T_j, a_j \leq a_m \tag{4}$$

式 (3) と式 (4) に不等式の推移律 $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ を適用すれば，つまり $a_0 \leq a_j, a_j \leq a_m \Rightarrow a_0 \leq a_m$ であるので，

$$\forall j \in E_j \forall m \in T_j a_0 \leq a_m$$

であり，これは，

$$\forall m \in T_0, a_0 \leq a_m$$

と同じことである．したがって，式 (1) を満たすから $|V| = k$ においても命題 1 がなりたつ．以上のことから数学的帰納法により任意の大きさの V のグラフ G に対して，命題 1 が成り立つ．

4 終わり

数学的帰納法は，2, 3 項間に対して定義される小さな命題を再帰的に適用して，より大きな有限の集合上に定義される命題を導出することができます．$n = k, n = k+1$ の関係を用いたものを帰納法の第一形式，$n < k, n = k$ の関係を用いたものを第二形式と呼びます．詳しくは「集合・位相，松坂和夫」に述べられているので，若いうち，時間のあるうちに学ぶと良いです．